CEVAP ANAHTARI

Ad Soyad :
Numara :

20.11.2019

MAT 103 LİNEER CEBİR I ARASINAV SORULARI

SORU 1 $\forall x, y \in Z$ için

$$\oplus : Z \times Z \to Z$$
$$(x,y) \to x \oplus y = x + y - 3$$

iç işlemi tanımlansın. $(Z,\oplus)$ bir abel grubudur, gösteriniz.

SORU 2 Bir $(H,\mathrm{T},\perp)$ halkasında (H,T) abel grubunun birim elemanı θ olsun. $\forall x \in H$ için

$$x \perp \theta = \theta \perp x = \theta$$

dir, ispatlayınız.

SORU 3 IR^3 de $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in IR^3 \mid x_2 = 0\}$ cümlesi bir alt vektör uzayı mıdır, araştırınız.

SORU 4 $\alpha = (2, 3k, -4, 1, 5), \beta = (6, -1, 3, 7, 2k) \in IR^5$ vektörlerinin ortogonal (dik) olması için k ne olmalıdır?

SORU 5 V bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $\forall x, y \in V$ için

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \text{(üçgen eşitsizliği)}$$

olduğunu ispatlayınız.

NOT:
Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

1- Birleşme Özelliği: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \text{ midir?}$$

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= x + y - 3 + z - 3 \\
&= x + y + z - 3 - 3 \\
&= x + (y \oplus z) - 3 \\
&= x \oplus (y \oplus z) \text{ dır.}
\end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}, +)$ A.Grup Birleşme özelliği, Değişme özelliği kullanılır.

Birim Eleman: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$x \oplus e = e \oplus x = x$$

olacak şekilde bir $e \in \mathbb{Z}$ varmıdır?

$$x \oplus e = x + e - 3 = x \Rightarrow e = 3$$

$$e \oplus x = e + x - 3 = x \Rightarrow e = 3 \quad \text{bulunur.}$$

Ters Eleman: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $e \in \mathbb{Z}$ birim eleman olsun.

$$x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = e$$

olacak şekilde x elemanının $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ tersi mevcut mudur?

$$x \oplus x^{-1} = x + x^{-1} - 3 = e = 3 \Rightarrow x^{-1} = 6 - \underbrace{x}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

$$x^{-1} \oplus x = x^{-1} + x - 3 = e = 3 \Rightarrow x^{-1} = 6 - x \in \mathbb{Z} \quad \text{bulunur.}$$

Değişme Özelliği: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$x \oplus y = y \oplus x \quad \text{midir?}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y - 3 \\ &= y + x - 3 \\ &= y \oplus x \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}, +)$ Abelgrup Değişme Özelliği kullanıldı.

Yukarıdaki dört özellik sağlandığı için $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $\oplus$ iç işlemi ile birlikte bir abel grup yapısına sahiptir. Soruda tanımlanan işlemin iç işlem olması ile birlikte kapalılık özelliğinin incelenmediğine dikkat ediniz.

2- (H,T) abel grubunun birim elemanı θ olduğundan

$$\theta \, T \, \theta = \theta \quad \ldots \quad (1)$$

yazılır. $\forall x \in H$ için

$$x \perp \theta \underset{(1) \text{ den}}{=} x \perp (\theta \, T \, \theta) \underset{\substack{(H,T,\perp) \\ \text{Halka, } \perp \text{ işlemi} \\ T \text{ işlemine dağılımlıdır (soldan)}}}{=} (x \perp \theta) \, T \, (x \perp \theta)$$

bulunur. Buradan; θ, T işleminin birim elemanı olduğu için

$$x \perp \theta = \theta \text{ elde edilir.}$$

Benzer şekilde

$$\theta \perp x = (\theta \, T \, \theta) \perp x = (\theta \perp x) \, T \, (\theta \perp x)$$

$$\Rightarrow \theta \perp x = \theta \text{ dır.}$$

O halde; $\forall x \in H$ için

$$x \perp \theta = \theta \perp x = \theta \quad \text{bulunur.}$$

3- $W \subset \mathbb{R}^3$ olduğu açıktır.

$\exists x_1 = x_3 = 0$ için $(0,0,0) \in W$ olup $W \neq \emptyset$ dır.

- $\forall X, Y \in W$ için

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, x_3) \, ; \quad x_2 = 0 \\ + \quad Y &= (y_1, y_2, y_3) \, ; \quad y_2 = 0 \\ \hline X + Y &= (x_1 + y_1, \underbrace{x_2 + y_2}_{=0}, x_3 + y_3) \, ; \quad x_2 + y_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X + Y \in W \text{ dır.}$$

• $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in W$ için $x_2 = 0$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda x = \lambda (x_1, x_2, x_3)$$

$$= (\lambda x_1, \underbrace{\lambda x_2}_{=0}, \lambda x_3) \quad ; \quad x_2 = 0 \text{ iken } \lambda x_2 = 0 \text{ dır.}$$

$\Rightarrow \lambda x \in W$ dır.

Sonuç olarak; W, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt vektör uzayıdır.

4- α ve β vektörleri ortogonal iseler

$\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ dır. Öyleyse,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle (2, 3k, -4, 1, 5), (6, -1, 3, 7, 2k) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2.6 + 3k(-1) + (-4).3 + 1.7 + 5.2k = 0$$

$$\Rightarrow 7k + 7 = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ olur.}$$

5- $\forall x, y \in V$ için norm tanımından

$$\|x+y\|^2 = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\,\mathrm{Re}\{\langle x, y \rangle\} \text{ yazılır.}$$

Herhangi bir c kompleks sayısı için

$\mathrm{Re}\{c\} \leq \{c\}$ olduğundan

$\|x+y\|^2 \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\,|\langle x, y \rangle|$ dır. Bu eşitlikte "$|\langle x, y \rangle|$" ifadesi yerine Schwarz eşitsizliğindeki değeri yazılırsa

$$\|x+y\|^2 \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\,\|x\|.\|y\|$$

$= (\|x\| + \|y\|)^2$ olup her iki tarafın karesi alındığında üçgen eşitsizliği elde edilmiş olur.